

HY-280 Θεωρία Υπολογισμού

Ισοδυναμία μεταξύ NFAs και DFAs

03/10/2026

Οι σημειώσεις αυτές αφορούν την εκφραστική δύναμη των NFAs και DFAs. Καθώς τα DFAs είναι μια ειδική κατηγορία NFAs, δεν μπορεί να υπάρχει γλώσσα η οποία αν αναγνωρίζεται από ένα DFA, αλλά από κανένα NFA. Συνεπώς, η απάντηση στο ερώτημα ‘*υπάρχει γλώσσα η οποία να αναγνωρίζεται από κάποιο DFA αλλήλα από κανένα NFA;*’ θα πρέπει να είναι αρνητική. Ποια είναι όμως η απάντηση στο ερώτημα ‘*υπάρχει γλώσσα η οποία να αναγνωρίζεται από κάποιο NFA αλλήλα από κανένα DFA;*’. Για να τεκμηριώσουμε τις απαντήσεις μας, θα διατυπώσουμε αυτές τις ερωτήσεις σε ένα θεώρημα και θα το αποδείξουμε.

Θεώρημα 1. *Μια γλώσσα L αναγνωρίζεται από ένα DFA ανν υπάρχει NFA N τ.ω.*

$$L(N) = L.$$

Με άλλα λόγια, για κάθε DFA M , υπάρχει ένα NFA N τ.ω. $L(N) = L(M)$, και για κάθε NFA N , υπάρχει ένα DFA M τ.ω. $L(M) = L(N)$.

Πρόταση 1. *Για κάθε DFA M , υπάρχει ένα NFA N τ.ω. $L(N) = L(M)$.*

Απόδειξη. Ένα DFA είναι ένα NFA, απλώς θα πρέπει και συντακτικά να ικανοποιήσουμε τους ορισμούς των αυτομάτων. Σε ένα DFA η συνάρτηση μετάβασης ορίζεται ως

$$\delta_{\text{DFA}} : K \times \Sigma \rightarrow K,$$

ενώ σε ένα NFA ως,

$$\delta_{\text{NFA}} : K \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow \mathcal{P}(K).$$

Για ένα DFA $M = (K, \Sigma, \delta_M, q_0, F)$, ορίζουμε το ισοδύναμο NFA $N = (K, \Sigma, \delta_N, q_0, F)$ το οποίο έχει ακριβώς το ίδιο σύνολο καταστάσεων, τις ίδιες αρχικές και τελικές καταστάσεις με το M . Η μοναδική διαφορά είναι στην συνάρτηση μετάβασης, η οποία έχει την μορφή,

$$\delta_N(q, a) = \begin{cases} \{\delta_M(q, a)\} & , \text{για κάθε } a \in \Sigma, \\ \delta_N(q, \varepsilon) = \emptyset & , \text{για κάθε } q \in K. \end{cases}$$

Έστω ότι $L(M) \supseteq L(N)$, τότε υπάρχει συμβολοσειρά, έστω w , η οποία αναγνωρίζεται από το M , αλλά όχι από το N . Τότε θα πρέπει $(q_0, w) \vdash_M^* (F, \varepsilon)$ και $(q_0, w) \not\vdash_N^* (K \setminus F, \varepsilon)$. Όμως, από την κατασκευή του N , $\delta_N(q, x) = \delta_M(q, x)$ για κάθε $x \in \Sigma$ και όχι $x = \varepsilon$. Εφόσον η w είναι ακολουθία από σύμβολα $x \in \Sigma$ που δεν περιέχουν ε και ο υπολογισμός $(q_0, w) \vdash_M^* (F, \varepsilon)$ θα συνεπάγεται $(q_0, w) \vdash_N^* (F, \varepsilon)$. Άρα, καταλήξαμε σε άτοπο.

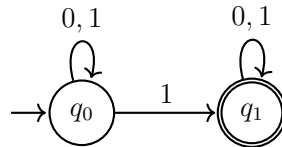
Έστω ότι $L(M) \subseteq L(N)$, τότε υπάρχει συμβολοσειρά, έστω w , η οποία αναγνωρίζεται από το N , αλλά όχι από το M . Ομοίως με πριν, ο υπολογισμός $(q_0, w) \vdash_N^* (F, \varepsilon)$ θα συνεπάγεται $(q_0, w) \vdash_M^* (F, \varepsilon)$. Άρα, καταλήξαμε σε άτοπο.

Άρα, ισχύει ότι $L(N) = L(M)$. □

Στη συνέχεια δίνουμε έναν απλό αλγόριθμο προσομοίωσης των υπολογισμών που κάνει ένα NFA.

Αλγόριθμος Προσομοίωσης NFA. Σημειώνει την τρέχουσα κατάσταση και καθέναν από τους ενεργούς υπολογισμούς (ενεργά υπολογιστικά νήματα).

π.χ.,



Για είσοδο $w = 111$, η προσομοίωση θα είναι

$$\langle q_0 \rangle \xrightarrow{1} \langle q_0, q_1 \rangle \xrightarrow{1} \langle q_0, q_1, q_1 \rangle \xrightarrow{1} \langle q_0, q_1, q_1, q_1 \rangle.$$

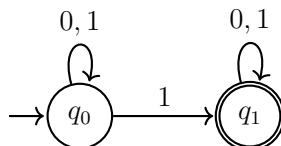
□

Παρατηρήσεις.

- Εκτενέστερες συμβολοσειρές εισόδου, περισσότερα νήματα. Άρα εκθετική αύξηση.
- Η ακριβής σειρά των νημάτων δεν παίζει ρόλο. Δεν έχει σημασία αν το 1ο ή το 10ο υπολογιστικό νήμα βρίσκεται σε κάποια κατάσταση s .
- Αν δύο νήματα είναι τα ίδια, μπορούμε να αγνοήσουμε το ένα. Νήματα στην ίδια κατάσταση συμπεριφέρονται με τον ίδιο τρόπο, δηλαδή είτε και τα δύο θα καταλήξουν σε τερματική κατάσταση είτε όχι.

Επομένως, μπορούμε να βελτιώσουμε τον προηγούμενο αλγόριθμο,

π.χ., (συνέχεια)



Για είσοδο $w = 111$, η προσομοίωση θα είναι

$$\{q_0\} \xrightarrow{1} \{q_0, q_1\} \xrightarrow{1} \{q_0, q_1\} \xrightarrow{1} \{q_0, q_1\}.$$

□

Παρατηρήσεις.

- Χρειάζεται να ιχνηλατούμε τις καταστάσεις των ενεργών υπολογιστικών νημάτων:
 - Μη-διατεταγμένα: δεν παίζει ρόλο ποιο ακριβώς νήμα βρίσκεται σε ποια κατάσταση.
 - Όχι διπλότυπα: κρατάμε ένα αντίγραφο από πολλαπλά νήματα που βρίσκονται στην ίδια κατάσταση.
- Πόση μνήμη χρειάζεται;
 - Αν K το πλήθος των καταστάσεων του NFA, τότε χρειάζεται να ιχνηλατεί ένα υποσύνολο του K .
 - Αυτό μπορεί να γίνει σε $|K|$ bits μνήμης, δηλαδή $2^{|K|}$ καταστάσεις, το οποίο είναι πεπερασμένο.

Θα κατασκευάσουμε ένα ισοδύναμο DFA. Προς αυτό, το DFA θα πρέπει να εκτελεί τον αλγόριθμο προσομοίωσης του NFA. Δηλαδή, θα πρέπει να 'θυμάται' τις τρέχουσες καταστάσεις των ενεργών υπολογιστικών νημάτων, χωρίς διπλότυπα. Επομένως να διατηρεί ένα υποσύνολο των καταστάσεων του NFA. Όταν η κεφαλή διαβάζει ένα καινούργιο σύμβολο, το DFA θα πρέπει να ανανεώνει τα ενεργά υπολογιστικά νήματα. Τέλος, το DFA θα πρέπει να αποδέχεται οποτεδήποτε ένα από τα υπολογιστικά νήματα καταλήξει σε κατάσταση τερματισμού.

Ορισμός 1. Έστω NFA $N = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Για συμβολισειρά w και κατάσταση $p \in K$, γράφουμε ως $\hat{\delta}_N(p, w)$ το σύνολο όλων των προσβάσιμων καταστάσεων μέσω κάποιου υπολογισμού σε είσοδο w από την κατάσταση p , και θα έχει ως τύπο

$$\hat{\delta}_N(p, w) = \{q \in K \mid p \xrightarrow{w}_N q\}.$$

Κατασκευή DFA από NFA. Δοθέντως ενός NFA $N = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$ θα κατασκευάσουμε το DFA $\det(N) = (K', \Sigma, \delta', q'_0, F')$ ως εξής:

$$K' = \mathcal{P}(K), \quad q'_0 = \hat{\delta}_N(q_0, \varepsilon), \quad F' = \{A \subseteq K \mid A \cap F \neq \emptyset\},$$

και συνάρτηση μετάβασης,

$$\delta'(A, a) = \bigcup_{q \in A} \hat{\delta}_N(q, a),$$

δηλαδή $\delta'(A, a) = \delta'(\{q_1, q_2, \dots, q_k\}, a) = \hat{\delta}_N(q_1, a) \cup \hat{\delta}_N(q_2, a) \cup \dots \cup \hat{\delta}_N(q_k, a)$.

Για την απόδειξη της ορθότητας της κατασκευής θα χρειαστούμε τον ακόλουθο βοηθητικό ορισμό

Ορισμός 2. Έστω K το σύνολο των καταστάσεων ενός NFA N , και έστω $A \subseteq K$. Θα πούμε ότι το A είναι ε -κλειστό ανν για κάθε $q \in A$, έχουμε

$$\hat{\delta}_N(q, \varepsilon) \subseteq A.$$

Με άλλα λόγια, κάθε κατάσταση που είναι προσβάσιμη από μια κατάσταση του A προ-σπελαύνοντας μόνο ε -μεταβάσεις, και εξακολουθεί να ανήκει στο A .

π.χ, τετριμένα παραδείγματα ε -κλειστών συνόλων είναι τα $\emptyset$ και K . Ένα άλλο παράδειγμα ε -κλειστού συνόλου είναι η αρχική κατάσταση ενός DFA

$$q'_0 = \hat{\delta}_N(q_0, \varepsilon).$$

Λήμμα 1 (Ορθότητα). Για κάθε NFA N , το DFA $\det(N)$ είναι ισοδύναμο του, δηλαδή

$$L(N) = L(\det(N)).$$

Σκαρίφημα Θα πρέπει να δείξουμε ότι,

$$\forall w \in \Sigma^*. \det(N) \text{ αναγνωρίζει } w \text{ ανν } N \text{ αναγνωρίζει } w.$$

Δηλαδή,

$$\forall w \in \Sigma^*. \hat{\delta}_{\det(N)}(q'_0, w) \cap F' \neq \emptyset \quad \text{ανν} \quad \hat{\delta}_N(q_0, w) \cap F \neq \emptyset.$$

Ισοδύναμα,

$$\forall w \in \Sigma^*, \text{ για } \{A\} = \hat{\delta}_{\det(N)}(q'_0, w), A \cap F \neq \emptyset \quad \text{ανν} \quad \hat{\delta}_N(q_0, w) \cap F \neq \emptyset.$$

Αντι αυτών θα αποδείξουμε έναν ισχυρότερο ισχυρισμό. Υπάρχουν οι εξής δύο τρόποι να ισχυροποιηθεί ο προηγούμενος ισχυρισμός

i.) $\forall w \in \Sigma^*. \hat{\delta}_{\det(N)}(q'_0, w) = \{A\}$ αν $\hat{\delta}_N(q_0, w) = A$. Με άλλα λόγια, η κατάσταση του DFA εφόσον διαβάσει μια συμβολοσειρά w είναι ακριβώς το σύνολο των καταστάσεων στις οποίες θα βρίσκεται το NFA αφότου διαβάσει το w .

ii.) $\forall w \in \Sigma^*$, για κάθε ε -κλειστό σύνολο $A \subseteq Q$, $\det(N)(A, w) \cap F' \neq \emptyset$ αν $\exists q \in A : \hat{\delta}_N(q, w) \cap F \neq \emptyset$. Διαισθητικά, το DFA $\det(N)$ αναγνωρίζει την w από το A αν το NFA N αναγνωρίζει την w από κάποια κατάσταση στο A .

Και οι αυτές διατυπώσεις αρκούν για να αποδείξουμε την ορθότητα της κατασκευής, και οι δύο μπορούν να αποδειχθούν μέσω επαγωγής. Στο Λήμμα 2 διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε την πρόταση i), ενώ με το Λήμμα 4 διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε την πρόταση ii).

Λήμμα 2. $\forall w \in \Sigma^*. \hat{\delta}_{\det(N)}(q'_0, w) = \{A\}$ αν $\hat{\delta}_N(q_0, w) = A$.

Απόδειξη. Μέσω επαγωγής ως προς το μήκος της συμβολοσειράς w , $|w|$.

Βάση επαγωγής $|w| = 0$: Τότε ισχύει $w = \varepsilon$. Επομένως,

$$\hat{\delta}_{\det(N)}(q'_0, \varepsilon) = \{q'_0\} = \{\hat{\delta}_N(q_0, \varepsilon)\},$$

το οποίο ισχύει από τον ορισμό της $\hat{\delta}_{\det(N)}$ και του q'_0 .

Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι η δήλωση ισχύει για όλες τις συμβολοσειρές w με $|w| < n$.

Επαγωγικό βήμα: Έστω $|w| = n$, επομένως $w = ua$ με $|u| = n - 1$ και $a \in \Sigma$.

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_{\det(N)}(q'_0, ua) &= \{A\} \\ \iff q'_0 &\xrightarrow{ua}_{\det(N)} A && \text{ορισμός } \hat{\delta} \text{ και ντετερμινισμός } \det(N) \\ \iff \exists B. q'_0 &\xrightarrow{u}_{\det(N)} B, B \xrightarrow{a}_{\det(N)} A \\ \iff \exists B. \hat{\delta}_{\det(N)}(q'_0, u) &= \{B\}, B \xrightarrow{a}_{\det(N)} A && \text{ορισμός } \hat{\delta} \text{ και ντετερμινισμός } \det(N) \\ \iff \exists B. \hat{\delta}_N(q_0, u) &= B \text{ και } A = \bigcup_{q \in B} \hat{\delta}_N(q, a) && \text{επαγωγική υπόθεση και} \\ &&& \text{μεταβάσεις στο } \det(N) \\ \iff \hat{\delta}_N(q_0, ua) &= A. && (\text{Λήμμα 3}) \end{aligned}$$

□

Λήμμα 3. Υπάρχει B τ.ω. $\hat{\delta}_N(q_0, u) = B$ και $A = \bigcup_{q \in B} \hat{\delta}_N(q, a)$ αν $\hat{\delta}_N(q_0, ua) = A$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$A = \bigcup_{q \in B} \hat{\delta}_N(q, a) \quad \text{ανν} \quad (q \in A \iff \exists q' \in B \text{ τ.ω. } q' \xrightarrow{a}_N q).$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_N(q_0, u) = B \text{ και } A &= \bigcup_{q \in B} \hat{\delta}_N(q, a) \\ &\iff (q \in A \iff \exists q'. q_0 \xrightarrow{u}_N q' \text{ και } q' \xrightarrow{a}_N q) \\ &\iff (q \in A \iff q_0 \xrightarrow{ua}_N q) \\ &\iff \hat{\delta}_N(q_0, ua) = A. \end{aligned}$$

□

Λήμμα 4. Για κάθε συμβολιοσειρά $w \in \Sigma^*$ και κάθε ε -κλειστό σύνολο $A \subseteq Q$, έχουμε

$$\hat{\delta}_{\det(N)}(A, w) \cap F' \neq \emptyset \quad \text{ανν} \quad \exists q \in A : \hat{\delta}_N(q, w) \cap F \neq \emptyset.$$

Θα θέλαμε να αποδείξουμε τον ισχυρισμό χωρίς της έξτρα υπόθεση ότι το A είναι ε -κλειστό, δηλαδή να αποδείξουμε τον ισχυρισμό

$$\forall w \in \Sigma^*, \forall A \subseteq Q : \hat{\delta}_{\det(N)}(A, w) \cap F' \neq \emptyset \text{ ανν } \exists q \in A : \hat{\delta}_N(q, w) \cap F \neq \emptyset.$$

Ωστόσο, αυτός ο, ακόμα ισχυρότερος ισχυρισμός δεν ισχύει. Παρόλα αυτά, για $A = q'_0$ (το οποίο είναι ε -κλειστό), το Λήμμα 4 επαρκεί για να θεμελιώσει την ορθότητα της κατασκευής του DFA.

Απόδειξη *λήμματος 4*. Μέσω επαγωγής ως προς το μήκος της συμβολιοσειράς w , $|w|$.

Βάση επαγωγής $|w| = 0$: Για οποιοδήποτε σύνολο A ,

$$\hat{\delta}_{\det(N)}(A, \varepsilon) = \{A\}.$$

Επομένως,

$$\hat{\delta}_{\det(N)}(A, \varepsilon) \cap F' \neq \emptyset \iff A \cap F \neq \emptyset.$$

Αν το σύνολο A είναι ε -κλειστό, τότε $\hat{\delta}_N(A, \varepsilon) = A$, και συνεπώς

$$\hat{\delta}_{\det(N)}(A, \varepsilon) \cap F' \neq \emptyset \iff A (= \hat{\delta}_N(A, \varepsilon)) \cap F \neq \emptyset,$$

το οποίο και αποδεικνύει την βάση της επαγωγής.¹

¹Παρατηρείστε τον κρίσιμο ρόλο του ε -κλειστού συνόλου. Εξασφαλίζει ότι $\hat{\delta}_N(A, \varepsilon) = A$. Χωρίς αυτή την ιδιότητα, η βάση της επαγωγής δεν μπορεί να αποδειχθεί και για την ακρίβεια **δεν ισχύει**.

Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι η δήλωση ισχύει για όλες τις συμβολοσειρές w με $|w| < n$.

Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι $|w| = n$, επομένως $w = au^2$ με $|u| = n - 1$ και $a \in \Sigma$ και έχουμε,

$$\hat{\delta}_{\det(N)}(A, w = au) = \{C\}$$

αν υπάρχει B τ.ω.

$$\delta'(A, a) = B \quad \text{ανδ} \quad \hat{\delta}_{\det(N)}(B, u) = \{C\}.$$

Αν το σύνολο A είναι ε -κλειστό, τότε το σύνολο B είναι επίσης ε -κλειστό (Λήμμα 5). Άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε την επαγωγική υπόθεση στην συμβολοσειρά u και το σύνολο B . Επομένως,

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_{\det(N)}(A, w = au) &= \{C\} \text{ και } C \in F' \\ \iff \exists B : \delta'(A, a) = B, \hat{\delta}_{\det(N)}(B, u) &= \{C\}, C \in F' && \text{ορισμός } \hat{\delta}_{\det(N)} \\ \iff \exists B : \delta'(A, a) = B, \exists q \in B : \hat{\delta}_N(q, u) \cap F &\neq \emptyset \\ \iff \exists B : \delta'(A, a) = B, \exists q \in B, \exists q_2 \in F : q \xrightarrow{u}_N q_2 &&& \text{ορισμός } \hat{\delta} \text{ και ντετερμινισμός } \det(N) \\ \iff \exists q_1 \in A, \exists q_2 \in F : q_1 \xrightarrow{a}_N q, q \xrightarrow{u}_N q_2 &&& \text{επαγωγική υπόθεση και} \\ &&& \text{μεταβάσεις στο } \det(N) \\ \iff \exists q_1 \in A : \hat{\delta}_N(q_1, w) \cap F &\neq \emptyset. && \text{(Λήμμα 5)} \end{aligned}$$

□

Λήμμα 5. Αν το σύνολο A είναι ε -κλειστό και $\delta'(A, a) = B$, τότε το σύνολο B είναι ε -κλειστό.

Απόδειξη. Για οποιοδήποτε $q \in B$, αρκεί να δείξουμε ότι αν $q \xrightarrow{\varepsilon}_N q'$, τότε $q' \in B$. Από τον ορισμό του δ' , έχουμε ότι το $q \in B$ συνεπάγεται ότι υπάρχει $q_1 \in A$ τ.ω. $q_1 \xrightarrow{a}_N q$. Εφόσον, $q \xrightarrow{\varepsilon}_N q'$, έχουμε $q_1 \xrightarrow{a\varepsilon}_N q'$. Πάλι, από τον ορισμό του δ' , έχουμε ότι $q' \in B$. Επομένως, το σύνολο B είναι ε -κλειστό. □

Ο τυπικός ορισμός του DFA περιλαμβάνει όλα τα $2^{|K|}$ υποσύνολα του K ως πιθανές καταστάσεις, πολλές εκ των οποίων μπορεί να είναι μη-προσβάσιμες από την αρχική κατάσταση. Για να απλοποιήσουμε την κατασκευή, περιοριζόμαστε **μόνο** στις προσβάσιμες καταστάσεις, δείτε Διάλεξη 4.

²Στην απόδειξη του Λήμματος 2 πήραμε $w = ua$.